Minimax-Prinzip

Daniel Petrovic

15. Dezember 2017

1 Einführung

In dieser Arbeit wird das Minimax-Prinzip kurz vorgestellt und seine Anwendung am einfachen Beispiel der elastischen Schwingungen demonstriert.

Zuerst werden in den Grundlagen einige wichtige Begriffe eingeführt. Danach werden die Spektralsätze und das Minimax-Prinzip eingeführt. Zum Schluss wird die Anwendung an Eigenfrequenzen eines Schwingungssystems vorgestellt.

2 Grundlagen

Hier werden einige Definitionen und Sätze ohne Beweise festgelegt die im weiteren Text verwendet werden. Die einzelnen Beweise können der Literatur aus dem Anhang entnommen werden.

Lemma 2.1. *Sei $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ eine reelle quadratische Matrix. Dann gilt:*

- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Definition 2.2. *Das **Skalarprodukt** von zwei Vektoren $u, w \in V$ eines Euklidischen oder unitären Vektorraumes $(V, \langle,\rangle)$ sei definiert als*

$$\langle v, w \rangle = v^T w$$

Definition 2.3. *Sei $(V, \langle,\rangle)$ ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum. Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal** wenn $\langle u, v \rangle = 0$ ist.*

Definition 2.4. *Eine Matrix $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^T$ ist.*

Definition 2.5. *Eine Matrix $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ heißt **orthogonal**, wenn A invertierbar ist und wenn $A^{-1} = A^T$ ist.*

Definition 2.6. *Eine Matrix $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ heißt **positiv definit**, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ gilt: $x^T Ax > 0$.*

Definition 2.7. *Sei A eine reelle symmetrische Matrix und $x \in \mathbb{R}^n$. Das **Rayleigh-Quotient** $R_A(x)$ wird definiert als:*

$$R_A(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

$R_A(x)$ ist also eine skalare Größe.

Die folgende Lemma wird ohne Beweis aufgeführt. Der Beweis findet sich z.B. in [1].

Lemma 2.8. *Zu einer Matrix $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$ gibt es genau dann einen Eigenvektor zum Eigenwert λ, wenn λ die Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A ist.*

Lemma 2.9. *Sei $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$. Dann hat A genau n komplexe Eigenwerte.*

Beweis. Sei $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$. Ferner sei χ_A das charakteristische Polynom von A. Es ist $Grad(\chi_A) = n$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt χ_A genau n komplexen Nullstellen (mitgezhählt Vielfältigkeiten). Nach (2.8) entspricht dann jeder dieser Nullstellen einem Eigenwert von A. $\square$

Lemma 2.10. *Sei $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ eine reelle symmetrische Matrix. Sei ferner λ ein Eigenwert von A. Dann ist λ reell, also $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Nach (2.9) hat A genau n komplexe Eigenwerte. Da A reell ist gilt $\overline{Av} = A\overline{v}$. Sei λ ein Eigenwert zum Eigenvektor v von A. Es gilt nach (2.9) $\lambda \in \mathbb{C}$. Ferner gilt:

$$\lambda\langle v, \overline{v} \rangle = \langle \lambda v, \overline{v} \rangle = \langle Av, \overline{v} \rangle = \langle v, A\overline{v} \rangle = \langle v, \overline{Av} \rangle = \langle v, \overline{\lambda v} \rangle = \overline{\lambda}\langle v, \overline{v} \rangle.$$

Also $\lambda = \overline{\lambda}$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$, da $\langle v, \overline{v} \rangle > 0$ für $v \neq 0$.

$\square$

Der folgende Satz für die Dimensionsformel für Summe und Durschnitt der Unterräume eines Vektorraumes wird ohne Beweis aufgeführt. Der Beweis findet sich z.B. in [2]:

Satz 2.11. *Sei V ein Vektorraum, und seien U und W endlichdimensionale Unterräume von V. Dann gilt:*
$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$.

Der folgende Satz beschreibt die Zerlegung einer positiv definiten Matrix in Produkt zweier Dreiecksmatrizen. Der Beweis findet sich z.B. in [4].

Satz 2.12. ***Cholesky-Zerlegung*** *Sei $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ eine reelle symmetrische positiv definite Matrix. Dann kann A als Produkt von zwei Dreiecksmatrizen zerlegt werden:*

$$A = LL^T$$

wobei $L \in M_{nn}(\mathbb{R})$ eine untere Dreicksmatrix mit positiven Diagonalelementen ist. Die Zerlegung ist eindeutig.

3 Spektralsatz

Spektralsatz beschreibt die Zerlegung einer (in diesem Fall) symmetrischen reellen Matrix A als Produkt einer orthogonalen Matrix und einer diagonalen Matrix bestehend aus Eigenwerten von A. Die folgenden zwei Sätze werden ohne Beweis aufgeführt. Die Beweise finden sich z.B. in [1] oder [4].

3.1 Spektralsatz

Satz 3.1. *Ist $K \in M_{nn}(\mathbb{R})$ eine reelle symmetrische $n \times n$ Matrix, dann existiert eine orthogonale Matrix $U \in M_{nn}(\mathbb{R})$, so dass gilt*

$$\begin{aligned} K &= U \; diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \; U^T && (1) \\ &= U \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} U^T && (2) \end{aligned}$$

Satz 3.2. *Ist $K \in M_{nn}(\mathbb{R})$ eine reelle symmetrische $n \times n$ Matrix, dann existiert eine orthonormale Basis $u_1, \cdots, u_n$ von $\mathbb{R}^n$, so dass gilt*

$$Ku_j = \lambda_j u_j$$

3.2 Erweiterter Spektralsatz

Satz 3.3. *Sind K,$M \in M_{nn}(\mathbb{R})$ reelle symmetrische $n \times n$ Matrizen, mit M positiv definit, dann existiert eine Matrix $F \in M_{nn}(\mathbb{R})$, so dass gilt*

$$K = F\ diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\ F^T \tag{3}$$
$$= F \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} F^T \tag{4}$$

mit $F^T\ M\ F = I_n$

Beweis. Da die Matrix K symmetrisch ist, gilt nach der Definition (2.4) $K = K^T$.

Da Matrix M reell symmetrisch und positiv definit ist, gibt es nach dem Satz (2.12) eine Cholesky-Zerlegung

$$M = LL^T \text{ mit } L \in M_{nn}(\mathbb{R}).$$

Wir betrachten die Matrix $K' = L^{-1}K(L^T)^{-1}$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} (K')^T &= \left(L^{-1}\ K\ (L^T)^{-1}\right)^T \\ &= \left((L^T)^{-1}\right)^T K^T \left(L^{-1}\right)^T \\ &= \left((L^{-1})^T\right)^T K^T \left(L^{-1}\right)^T \\ &= L^{-1}K(L^{-1})^T. \end{aligned}$$

Also gilt: $K' = K'^T$, d.h. die Matrix K' ist symmetrisch.

Nach dem Satz (3.1) existiert dann für K' eine Orthogonale Matrix $U \in M_{nn}(\mathbb{R})$ sodass gilt:

$$K' = L^{-1}K(L^T)^{-1} = U diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)U^T.$$

Durch die Multiplikation der oberen Gleichung mit L von links und L^T von rechts ergibt sich:

$$K = LU diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)U^T L^T$$

Wir setzen $F = U^T L^T$. Dann kann die obige Gleichung geschrieben werden als:

$$K = F^T diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)F$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} F^T MF &= (LU)(LL^T)(U^T L^T) \\ &= (LUL)(L^T U^T L^T) \\ &= (LUL)(LUL)^T = (LUL)(LUL)^{-1} = I_n \end{aligned}$$

denn die Matrix LUL ist orthogonal, da U orthognal ist.

□

4 Minimaxprinzip

4.1 Minimax-Satz

Satz 4.1. *Ist $K \in M_{nn}(\mathbb{R})$ eine reelle symmetrische $n \times n$ Matrix, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ die nichtfallend geordnete Eigenwerte von K (die Vielfachheiten mitgezählt) und S_j die Menge aller j-dimensionalen Teilräume von $\mathbb{R}^n$, $(j \leq n)$, dann gilt*

$$\lambda_j = \min_{S_j} \max_{x \in S_j} \frac{x^T\ K\ x}{x^T\ x}$$

mit

$$\frac{x^T\ K\ x}{x^T\ x} = \frac{(x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}.$$

Entsprechend den Definitionen für das Rayleigh-Quotient (2.7) und das Skalarprodukt (2.2) kann der Satz (4.1) auch geschrieben werden als:

$$\lambda_j = \min_{S_j} \max_{x \in S_j} R_K(x)$$

Beweis. Seien $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \lambda_n$ nach Voraussetzung die nichtfallend angeordneten Eigenwerte von K.

Seien $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ die entsprechend den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ orthonormalen Eigenvektoren von K. Nach dem Spektralsatz (3.2) gibt es solche Vektoren.

1. Schritt Sei $U_j \in S_j$ ein j-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Sei W_{jn} der Unterraum von $\mathbb{R}^n$ gespannt durch die Eigenvektoren $u_j, \ldots, u_n$ von K entsprechend den Eigenwerten $\lambda_j \leq \cdots \leq \lambda_n$.

Nach Satz (2.11) gilt:

$$\begin{aligned} dim(U_j \cap W_{jn}) &= dim(U_j) + dim(W_{jn}) - dim(U_j + W_{jn}) \\ &= j + (n - j + 1) - dim(U_j + W_{jn}) \\ &\geq j + (n - j + 1) - n = 1 \end{aligned}$$

da $dim(U_j + W_{jn}) \leq n$

D.h. es gibt einen Vektor $v \in U_j \cap W_{jn}$ mit $v \neq 0$. Dann gibt es $a_j, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sodass gilt:

$$v = a_j u_j + \cdots + a_n u_n$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
v^T K v &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right)^T K \left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i u_i)^T\right) \left(\sum_{i=1}^{n} K(a_i u_i)\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i^T\right) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i u_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \lambda_i \lambda_j (u_i^T u_j) \\
&= \lambda_j a_j^2 + \cdots + a_n \lambda_n^2 \text{ (wegen } u_i^T u_j = \delta_{ij} \text{ da } u_i, u_j \text{ orthonormal)} \\
&\geq \lambda_j (a_j^2 + \cdots + a_n^2) = \lambda_j (v^T v)
\end{aligned}$$

Also $\lambda_j \leq \frac{v^T K v}{v^T v}$ bzw. $\lambda_j \leq \min_{S_j} \max_{x \in S_j} R_K(x)$

2. Schritt Sei nun U_j der durch die Vektoren $u_1, \ldots, u_j$ gespannte Unterraum. Sei $v \in U_j$ und $v = a_1 u_1 + \cdots + a_j u_j$.

Es gilt ähnlich wie im 1. Schritt :

$$v^T K v = \lambda_1 a_1^2 + \cdots + a_j \lambda_j^2 \leq \lambda_j (a_1^2 + \cdots + a_n^2) = \lambda_j (v^T v)$$

Also $\lambda_j \geq \frac{v^T K v}{v^T v}$ bzw. $\lambda_j \geq \min_{S_j} \max_{x \in S_j} R_K(x)$

Da $\min_{S_j} \max_{x \in S_j} R_K(x) \leq \lambda_j \leq \min_{S_j} \max_{x \in S_j} R_K(x)$ muss gelten:

$$\lambda_j = \min_{S_j} \max_{x \,\in\, S_j} R_K(x)$$

was zu beweisen war. □

4.2 Erweiterter Minimax-Satz

Satz 4.2. *Sind K,M $\in M_{nn}(\mathbb{R})$ reelle symmetrische $n \times n$ Matrizen mit M positiv definit, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ die nichtfallend geordnete Eigenwerte von K (die Vielfachheiten mitgezählt) und S_j die Menge aller j-dimensionalen Teilräume von $\mathbb{R}^n$, $(j \leq n)$, dann gilt*

$$\lambda_j = \min_{S_j} \max_{x \,\in\, S_j} \frac{x^T \; K \; x}{x^T \; M \; x}$$

mit

$$\frac{x^T\ K\ x}{x^T\ M\ x} = \frac{(x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}{(x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

Beweis. Sei $M = L^T L$ die Cholesky-Zerlegung der Matrix M und I_n die Einheitsmatrix.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{x^T K x}{x^T M x} &= \frac{x^T I_n K I_n x}{x^T (L^T L) x} \\ &= \frac{x^T \left(L^T (L^T)^{-1}\right) K \left(L^{-1} L\right) x}{(x^T L^T)(Lx)} \\ &= \frac{\left(x^T L^T\right) \left((L^T)^{-1} K L^{-1}\right) (Lx)}{(Lx)^T (Lx)} \\ &= \frac{(Lx)^T \left((L^T)^{-1} K L^{-1}\right) (Lx)}{(Lx)^T (Lx)} \\ &= \frac{y^T K' y}{y^T y} \end{aligned}$$

mit $y = Lx$ und $K' = (L^T)^{-1} K L^{-1}$.

Wie im Beweis vom Satz (3.1) gezeigt wurde, ist die Matrix K' symmetrisch. Da die Matrizen K und K' die gleichen Eigenwerte haben, gilt nach Satz (4.1):

$$\lambda_j = \min_{S_j} \max_{y\, \in\, S_j} \frac{y^T\ K'\ y}{y^T\ y} = \min_{S_j} \max_{x\, \in\, S_j} \frac{x^T\ K\ x}{x^T\ M\ x}$$

was zu beweisen war. □

4.3 Monotonieeigenschaften

Definition 4.3. *Seien $K, K' \in M_{nn}(\mathbb{R})$ reelle symmetrische $n \times n$ Matrizen. Dann wird zwischen K und K' eine Ordnungsrelation wie folgt definiert:*

$$K \leq K' \Longleftrightarrow x^T\ K\ x \leq x^T\ K'\ x \ \ \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Satz 4.4. *Sind $K, K' \in M_{nn}(\mathbb{R})$ reelle symmetrische $n \times n$ Matrizen, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ und $\lambda'_1, \cdots, \lambda'_n$ die nichtfallend geordnete Eigenwerte von K bzw. K', dann gilt:*

$$K \leq K' \Longrightarrow \lambda_j \leq \lambda'_j, \; j = 1, \ldots, n$$

Beweis. Sei $K \leq K'$.

Nach der Definition (4.3) gilt dann für alle $x \in \mathbb{R}^n$: $x^T Kx \leq x^T K' x$.

Sei S_j ein j-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $x \in S_j$: $\frac{x^T Kx}{x^T x} \leq \frac{x^T K' x}{x^T x}$ und damit auch

$$\max_{x \in S_j} \frac{x^T Kx}{x^T x} \leq \max_{x \in S_j} \frac{x^T Kx}{x^T x} \quad (*)$$

Seien λ_j und λ'_j die j-te Eigenwerte von K bzw. K'. Nach dem Satz (4.1) und mit (*) gilt:

$$\lambda_j = \min_{S_j} \max_{x \in S_j} \frac{x^T Kx}{x^T x} \leq \min_{S_j} \max_{x \in S_j} \frac{x^T K' x}{x^T x} = \lambda'_j.$$

□

Definition 4.5. *Seien $K, K', M, M' \in M_{nn}(\mathbb{R})$ reelle symmetrische $n \times n$ Matrizen. Dann wird zwischen (K, M) und (K', M') eine Ordnungsrelation wie folgt definiert:*

$$(K, M) \leq (K', M') \Longleftrightarrow K \leq K', M' \leq M$$

Satz 4.6. *Sind $K, K', M, M' \in M_{nn}(\mathbb{R})$ reelle symmetrische positiv definite $n \times n$ Matrizen und $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ und $\lambda'_1, \cdots, \lambda'_n$ die nichtfallend geordnete Eigenwerte von K bzw. K', dann gilt:*

$$(K, M) \leq (K', M') \Longrightarrow \lambda_j \leq \lambda'_j, \; j = 1, \ldots, n$$

Beweis. Sei $K \leq K'$ und $M' \leq M$.

Nach der Definition (4.3) gilt dann für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x^T Kx \leq x^T K' x \text{ und } x^T M' x \leq x^T Mx \quad (**)$$

Sei S_j ein j-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Mit (**) gilt für alle $x \in S_j$:

$$\frac{x^T Kx}{x^T Mx} \leq \frac{x^T K' x}{x^T Mx} \leq \frac{x^T K' x}{x^T M' x}$$

da nach Voraussetzung K, K', M, M' positiv definit sind.
Daraus ergibt sich:

$$\max_{x \in S_j} \frac{x^T K x}{x^T M x} \leq \max_{x \in S_j} \frac{x^T K' x}{x^T M' x}$$

Mit dem allgemeinen Minimax-Satz (4.2) folgt dann:

$$\lambda_j = \min_{S_j} \max_{x \in S_j} \frac{x^T K x}{x^T M x} \leq \min_{S_j} \max_{x \in S_j} \frac{x^T K' x}{x^T M' x} = \lambda_j'.$$

□

5 Elastische Schwingungen

Das Minimax-Prinzip wird jetzt auf ein Beispiel aus der Theorie der elastischen Schwingungen angewendet.

Ein Teilchen der Masse m kann sich auf einer Feder entlang der senkrechten y-Achse nach unten bewegen.

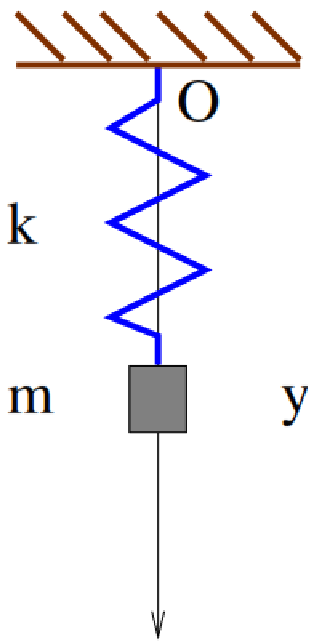

Abbildung 1: Einzelmassenschwinger

Im Gleichgewicht gilt **Schwerkraft** = **Gewichtskraft:** $ky = mg$. Daraus ergibt sich der Auschlag der Feder in der Gleichgewichtslage:

$$y = mg/k$$

Nach dem Newtonschen Gesetz gilt **Masse x Beschleunigung** = **Summe aller Kräfte**: $F_y = ma_y = \sum F_{yi}$. Im unseren Fall ist die Beschleunigung in y Richtung gegeben durch: $a_y = y''$.

Daraus ergibt sich für die Teilchenschwingung in y Richtung um die Gleichgewichtslage eine gewöhnliche Differentialgleichung 2.ter Ordnung:

$$F_y = ma_y = my'' = mg - ky$$

Der sin/cos Ansatz dieser DGL ergibt als Lösung:

$$y = y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + mg/k$$

mit

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

Nachprüfung:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \\
y''(t) &= -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t \\
my''(t) &= -mA\omega^2\cos\omega t - mB\omega^2\sin\omega t \\
&= -mA\frac{k}{m}\cos\omega t - mB\frac{k}{m}\omega t \\
&= -kA\cos\omega t - kB\sin\omega t = mg - ky
\end{aligned}$$

ω ist die Frequenz der Schwingung und wird umso größer je kleiner die Teilchenmasse und je größer die Federsteifigkeit ist.

Als nächstes betrachten wir einen Schwinger bestehend aus n Teilchen.

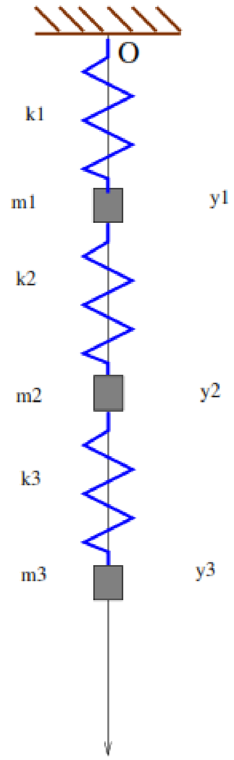

Abbildung 2: Mehrmassenschwinger

Auf das erste und das letzte Teilchen wirkt nur je eine Federkraft. Auf alle anderen Teilchen wirken zwei Federkräfte. Die Dehnung der Feder j ist gleich $y_j - y_{j-1}$ wobei y_j die Position des j-ten Teilchens bedeutet.

Für diesen n-Teilchenschwinger gilt für $j = 1, \ldots, n-1$ und mit $y_0 = 0$:

$$\begin{aligned} m_j y_j'' &= m_j g - k_j(y_j - y_{j-1}) + k_{j+1}(y_{j+1} - y_j) \\ &= m_j g + k_{j+1} y_{j+1} + (-k_{j+1} - k_j) y_j + k_j y_{j-1} \end{aligned}$$

Für die Bewegung vom untersten Teilchen gilt:

$$m_n y_n'' = m_n g - k_j(y_n - y_{n-1})$$

Dieses System von n Differentialgleichungen kann in Matrixform geschrieben werden als:

$$My'' + Ky = f \tag{5}$$

Die einzelnen Matrixelemente ergeben sich aus dem direkten Vergleich mit obigen Gleichungen zu:

$$M = diag(m_1, \dots, m_n) = \begin{pmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & m_n \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k3 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \dots & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & & -k_n \\ 0 & \dots & & & -k_n & k_n \end{pmatrix}$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} m_1 g \\ \vdots \\ m_n g \end{pmatrix}$$

$$y = y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \; t \in \mathbb{R}$$

Für die Ruhelage ergibt sich eine Konstante Lösung ($y'' = 0$):

$$y(t) = y_r = K^{-1} f$$

Für die einfachsten Lösungen können wieder sinusoidale Funktionen eingesetzt werden:

$$y(t) = y_r + (A \cos \omega t + B \sin \omega t)x \text{ (mit } x \in \mathbb{R}^n) \tag{6}$$

Einsetzen von (6) in (5) ergibt:

$$Kx = \omega^2 Mx \tag{7}$$

In der Gleichung (7) ist x der Eigenvektor und ω^2 der Eigenwert des Matrizenpaares (K,M). ω wird auch Eigenfrequenz des Systems benannt und spielt eine wichtige Rolle für die Stabilität des Systems.

Um den Einfluss der Teilchenmassen und Federsteifigkeit auf die Eigenfrequenz zu bestätigen, wird zum Schluss noch der folgende Satz bewiesen:

Satz 5.1. *Seien $K, M, \in M_{nn}(\mathbb{R})$ die oben definierten $n \times n$ Matrizen. Dann gilt:*

1. *Die Matrizen K,M sind positiv definit.*

2. *Efüllen bei zwei Paaren (K, M) und (K', M') die entsprechenden Konstanten m_j, m'_j, k_j, k'_j die Ungleichugen $m'_j \leq m_j$ und $k_j \leq k'_j$ so gilt $(K, M) \leq (K', M')$ und somit $\omega_j \leq \omega'_j$.*

Beweis. 1. Die Matrix M ist eine Diagonalmatrix und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n \neq 0$: $x^T M x = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 > 0$, also ist M positiv definit.

Die Matrix K kann geschrieben werden als: $K = K_1 + K_2 + K_3$ mit

$$K_1 = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & & k_n \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & k_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & -k_2 & \cdots & 0 \\ -k2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & -k_n \\ 0 & \cdots & -k_n & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$x^T K x = \sum_{i=1}^{3} x^T K_i x = \sum_{j=2}^{n} k_j (x_j - x_{j-1})^2 > 0, \text{ für } x \neq 0, (\text{ da } k_j > 0)$$

also ist K positiv definit.

2. Sei $m'_j \leq m_j$. Es gilt:

$$x^T M' x = \sum_{j=1}^{n} m'_j x_j^2 \leq \sum_{j=1}^{n} m_j x_j^2 = x^T M x$$

also folgt nach Definition (4.3) $M' \leq M$.

Sei $k_j \leq k'_j$. Aus dem Teil 1 folgt:

$$x^T K x = \sum_{j=2}^{n} k_j (x_j^2 - x_{j-1}^2) \leq \sum_{j=2}^{n} k'_j (x_j^2 - x_{j-1}^2) = x^T K' x$$

also folgt wieder nach Definition (4.3) $K \leq K'$.

Nach Definition (4.5) folgt dann: $(K, M) \leq (K', M')$ und nach dem Satz (4.6): $\omega_j \leq \omega'_j$.

Also je kleiner die Masse der Teilchen und je größer die Federsteifigkeit, desto höher sind die Eigenfrequenzen des Schwingungssystems.

$\square$

Literatur

[1] Luise Unger. *Lineare Algebra*. Fernuniversität in Hagen.

[2] Luise Unger. *Mathematische Grundlagen*. Fernuniversität in Hagen.

[3] Rajendra Bhatia. *Matrix Analysis*. Springer, 1997.

[4] David S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*, Second Edition. WILEY-INTERSCIENCE, 2002.